Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto al subespacio $\text{gen}\{1-2x, 1+x^2\}$ en la dirección del subespacio $\text{gen}\{x-x^2\}$. La matriz de T con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2\}$ es ...

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- b. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
- c. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. ✔
- d. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Simetría $\Rightarrow$ $T(1-2x) = 1-2x$

$T(1+x^2) = 1+x^2$

$T(x-x^2) = -x+x^2$

$$\begin{cases} T(1) - 2T(x) = 1-2x \to T(1) = 1-2x+2T(x) \\ T(1) + T(x^2) = 1+x^2 \quad (1) \\ T(x) - T(x^2) = -x+x^2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow T(x) = -x + x^2 + T(x^2)$

Reemplazando en (1): $\cancel{1} - 2x + 2(-x+x^2+T(x^2)) + T(x^2) = \cancel{1} + x^2$

$-4x + 2x^2 + 3T(x^2) = x^2$

$T(x^2) = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x$

$T(x) = -x + x^2 + \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

$T(1) = 1 - 2x + 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2\right) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2$

$$\Rightarrow [T]_B = \tfrac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la técnica de mínimos cuadrados, la recta que mejor ajusta los siguientes datos

x	-1	0	1	2	3
y	1	5	6	10	13

es ...

Seleccione una:

- a. $y = \frac{1}{10}(41 + 33x)$.
- b. $y = \frac{1}{10}(42 + 30x)$.
- c. $y = \frac{1}{10}(41 + 29x)$. ✔
- d. $y = \frac{1}{10}(37 + 31x)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T \cdot v = \begin{bmatrix} 41/10 \\ 29/10 \end{bmatrix} \to y = \frac{41}{10} + \frac{29}{10}x$$

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

se considera la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$\phi(x) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$.

El único vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ es ...

Seleccione una:

- a. $v = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$. ✔
- b. $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.
- c. $v = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}^T$.
- d. $v = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$.

$v = [a \quad b \quad c]^T$

$$\langle x, v \rangle = \underbrace{(3a+2b+c)}_{=2}x_1 + \underbrace{(2a+2b+c)}_{=5}x_2 + \underbrace{(a+b+c)}_{=3}x_3$$

$\Rightarrow$ $a = -3$ $\quad b = -5$ $\quad c = 1$

$\Rightarrow v = (-3 \quad 5 \quad 1)^T$

Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que $AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 2 \\ -7 & 7 & 7 & 1 \\ 8 & -8 & -8 & 9 \end{bmatrix}$,

donde rango$(A) = 3$, y B satisface que

$B\underbrace{[-1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1]^T}_{v_1} = [2 \;\; 1 \;\; 9]^T$,

$B\underbrace{[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T}_{v_2} = [6 \;\; 8 \;\; 1]^T$.

El conjunto solución de la ecuación $Bx = [-4 \;\; -7 \;\; 8]^T$ es ...

Seleccione una:

a. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

b. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. ✔

c. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

d. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 2 \\ -7 & 7 & 7 & 1 \\ 8 & -8 & -8 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cancel{x_4} = 0 \\ -10x_4 = 0 \to x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 + x_3$

$x \in Nul(AB) \Rightarrow x = (x_2 + x_3 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; 0]^T$

$= x_2(1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T + x_3(1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)^T$

$\to Nul(AB) = gen\{[1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T, [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T\}$

$x \in Nul(B) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow \underbrace{AB}_{=0}x = 0$

$\Rightarrow x \in Nul(AB)$

$Nul(B) = Nul(AB) \Rightarrow \cancel{a} \quad \cancel{c}$

$V_1 - V_2 = (-2 \;\; -1 \;\; -2 \;\; 0) \rightsquigarrow$ es sol part.

$B \cdot V_1 - B \cdot V_2 = B(V_1 - V_2) = (-4 \;\; -7 \;\; 8)$ ✓

Sea $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $y'' - 2y' - 15y = 0$.

Seleccione una:

a. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \text{gen}\{[1 \;\; -5]^T\}$.

b. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \text{gen}\{[1 \;\; -2]^T\}$.

c. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \text{gen}\{[1 \;\; -7]^T\}$.

d. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \text{gen}\{[1 \;\; -3]^T\}$. ✔

pol caract : $r^2 - 2r - 15 \to$ raíces $\left\langle \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow y = Ae^{-3t} + Be^{5t} \to y(0) = A + \cancel{B}$

$y' = -3Ae^{-3t} + 5Be^{5t} \to y'(0) = -3A + \cancel{5B}$

$\Rightarrow [y(0) \;\; y'(0)]^T = [A \;\; -3A]^T = A[1 \;\; -3]^T$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{Ae^{-3t}}_{\to 0} + \underbrace{Be^{5t}}_{\to\infty} = 0 \iff B = 0$

Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo de dimensión 3, y sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.

La distancia del vector $2v_1 + 5v_2$ al subespacio gen$\{3v_1 + 2v_3, 3v_2 + v_3\}$ es ...

Seleccione una:

a. $\frac{11\sqrt{14}}{14}$.

b. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

c. $\frac{13\sqrt{14}}{14}$.

d. $\frac{9\sqrt{14}}{14}$. ✔